- שדה המספרים הממשיים  
 – קבוצת כל הkיות הסדורות של מספרים ממשיים

("נקודה" או "ווקטור") *- הרכיבים של x*

## חיבור

## כפל בסקלר

– סקלר, מספר ממשי

הוא מרחב וקטורי מעל (יחסית לפעולות הנ"ל)

מכפלה פנימית

# תכונות

* "תבנית ביליניארית" – היא ליניארית בכל אחד מהמשתנים (כאשר המשתנה השני קבוע)
* "מוגדרת חיובית" - , ו אמ"ם
* חילופיות -

# הגדרה

נקראת "הנורמה האוקלידית" של x

# המושג הכללי של נורמה

אם מרחב וקטורי מעל השדה

## הגדרה

נורמה על היא פונקציה עם התכונות הבאות:

1. *מוגדרוּת אמ"ם*
2. *הומוגניות*
3. *א"ש המשולש לכל*

# הגדרה נורמה הpית

ה"נורמה" הpית של מוגדרת עבור כל ע"י

## טענה

*היא נורמה על לכל p כנ"ל*

## הוכחה

(א) ו(ב) טריוויאלים

1. ⬄ דהיינו לכל i דהיינו
2. ⇦

כדי להוכיח ש מקיים את אי שוויון המשולש, נוכיח תחילה את א"ש הולדר(Hölder)

# משפט(א"ש הולדר)

יהי ונסמן בq את ה"מעריך הצמוד" של p, דהיינו ()

אזי:

### מקרה פרטי

*⇦   
 – אי שוויון קושי שוורץ -*

## הוכחת משפט הולדר

אם או – טריוויאלי(צד שמאל = 0) לכן נניח ו

אם הוכחנו את אי השוויון כאשר כל רכיבי x וy הם אי שליליים, אז אי השוויון הכללי נובע מזה כדלקמן: *רכיבי   
 רכיבי*

**מניחים לכן:**

*המיתר ab מתחת לגרף של , כאשר על גרף הפונקציה*

*ממוצע משוקלל - . נקודת הy שלה תהיה , לכן*

*לפי תכונות הלוגריתמים:*

*זהו שוויון סימטרי, ולכן הוא נכון גם אם (⇦ )*

*נחזור לx,y:*

*נגדיר:   
לפי (\*) עבור ,*

*מ.ש.ל*

# משפט

הוא נורמה על (לכל )

## הוכחה

כבר בדקנו ש מקיים את התנאים של מוגדרות חיוביות והומוגניות. נשאר להוכיח את אי שיוויון המשולש .

אם א"ש המשולש טריוויאלי:

אפשר להניח ש(אחרת – טריוויאלי)

אם כבר הוכחנו את אי השוויון עבור המקרה של רכיבים אי שליליים, המקרה הכללי נובע כדלקמן:

## עיקר ההוכחה

, ,

*ולכן הולנדר נכון  
נחלק בגורם החיובי :*

*מ.ש.ל*

# הגדרה

הנורמה מוגדרת על ע"י

1. *מוגדרות: לכל i. ⇦ לכל i, ז"א . ⇨ טריוויאלי*
2. *הומוגניות:*
3. *⇦*